Probabilità e distribuzioni di probabilità

ADCOM 2025-2026

Filippo Gambarota PhD

filippo.gambarota@unipd.it

Università di Padova

Ultimo aggiornamento: 04-01-2026

Riferimenti

Un’ottima introduzione a questi temi si può trovare in:

Kruschke, J. K. (2015). *Doing Bayesian Data Analysis*. https://doi.org/10.1016/c2012-0-00477-2

- Capitolo 4, Introduzione alla probabilità (PDF)
- Capitolo 5, Teorema di Bayes (PDF)

Per questa lezione ci concentriamo soprattutto sull’idea intuitiva di probabilità e distribuzione.

Obiettivo

Introdurre quattro idee fondamentali:

1. che cos’è una **distribuzione di probabilità**
2. che cosa significa **assegnare probabilità** a valori possibili
3. la differenza tra **variabili discrete** e **continue**
4. qualche esempio di distribuzione di probabilità (Normale e Binomiale)

Distribuzione di probabilità

Una distribuzione di probabilità è un modo per descrivere:

- **quali valori sono possibili**
- **quanto è plausibile ciascun valore**

In altre parole, una distribuzione ci dice **come si distribuisce la probabilità** sui possibili risultati.

Esempio: lancio di una moneta

Consideriamo un singolo lancio di una moneta.

I possibili risultati sono due:

- testa 🔵
- croce ⚪

Questo è un esempio di **fenomeno casuale**: prima del lancio non sappiamo quale risultato osserveremo.

Spazio campionario

L'insieme di tutti i risultati possibili si chiama **spazio campionario** .

Nel caso di un singolo lancio:

Gli esiti devono essere:

- **mutuamente esclusivi**: in un singolo lancio non può uscire sia testa sia croce
- **esaustivi**: testa o croce coprono tutti i possibili risultati

Frequenza relativa e probabilità

Se lanciamo la moneta molte volte, possiamo contare quante volte esce testa. Se il numero di teste è su lanci, allora

è la **frequenza relativa** di testa. Quando il numero di lanci è molto grande, la frequenza relativa tende a stabilizzarsi attorno alla probabilità dell’evento.

Tre lanci di moneta

Ora immaginiamo di lanciare una moneta **3 volte**.

In questo caso gli esiti elementari possibili sono:

n1	**n2**	**n3**	**E**	**k**
⚪	⚪	⚪	1	0
⚪	⚪	🔵	2	1
⚪	🔵	⚪	3	1
⚪	🔵	🔵	4	2
🔵	⚪	⚪	5	1
🔵	⚪	🔵	6	2
🔵	🔵	⚪	7	2
🔵	🔵	🔵	8	3

Abbiamo:

sequenze possibili.

Qui **l’ordine conta**: ad esempio 🔵⚪🔵 e ⚪🔵🔵 sono due esiti diversi.

Tre lanci di moneta

Con tre lanci possiamo fare due domande diverse.

1. **Quale sequenza è uscita?**: possiamo quindi ottenere una delle 8 sequenze presentate in precedenza.
2. **Quante teste sono uscite?**: possiamo contare il numero di teste in ogni sequenza.

In questo secondo caso abbiamo:

Esiti, eventi e variabile casuale

Distinguiamo tre idee:

- **esito**: un risultato specifico, ad esempio 🔵⚪🔵
- **evento**: un insieme di esiti, ad esempio "ottenere esattamente 2 teste"
- **variabile casuale**: una regola che assegna un numero a ogni esito

Definiamo allora la variabile casuale:

La variabile casuale

Se definiamo

allora i possibili valori di sono:

Quindi:

- lo spazio campionario dei **tre lanci** contiene 8 sequenze
- la variabile casuale riassume queste 8 sequenze in 4 possibili valori

Un esempio concreto

L’evento “ottenere esattamente 2 teste” corrisponde a tre esiti:

- 🔵🔵⚪
- 🔵⚪🔵
- ⚪🔵🔵

Quindi un **evento** può contenere più esiti elementari.

Se la moneta è equa

Se assumiamo che la moneta sia equa, allora:

Ogni sequenza di tre lanci ha probabilità:

Per esempio:

- 🔵🔵⚪
- ⚪⚪⚪

Introduciamo un parametro:

In generale possiamo chiamare

Allora:

Se , la moneta è equa.
Se , la moneta è sbilanciata.

Probabilità di una sequenza

Supponiamo di voler calcolare la probabilità della sequenza:

🔵🔵⚪

Se i lanci sono indipendenti, moltiplichiamo le probabilità dei singoli lanci:

$$\theta \quad \theta \qquad\qquad \theta$$

cioè:

$$\theta \qquad\qquad \theta$$

Più in generale, una sequenza con k teste e n k croci ha probabilità:

$$\theta^k \qquad\qquad \theta^{\,n \quad k}$$

Probabilità di una sequenza

Di solito non ci interessa una sequenza specifica ma qualcosa come:

> Qual è la probabilità di ottenere **2 teste su 3 lanci**?

Essendo che non ci interessa la sequenza specifica, ci sono più modi di ottenere k teste.

Quante sequenze danno 2 teste?

Con 3 lanci, “2 teste” può essere ottenuto in 3 modi:

- 
- 
- 

Quindi:

$$p \quad k \qquad\qquad \theta \qquad \theta$$

Se θ :

$$p \quad k$$

Il coefficiente binomiale

In generale, il numero di modi in cui possiamo ottenere k successi in n prove è dato dal **coefficiente binomiale**:

$$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \qquad \frac{n}{k \quad n \quad k}$$

La formula di per se non è rilevante, serve solo capire che ci permette di contare le volte in cui otteniamo k successi in n lanci. Ovvero **quante sequenze diverse** producono lo stesso numero di successi.

La distribuzione Binomiale

Mettendo insieme i due pezzi:

- probabilità di una singola sequenza con k successi
- numero di sequenze che producono quei k successi

otteniamo:

$$p \; k \quad \theta \; n \qquad \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \; \theta^{k} \qquad \theta^{\,n \;\; k}$$

Questa è la **distribuzione Binomiale**.

Che cosa descrive la Binomiale?

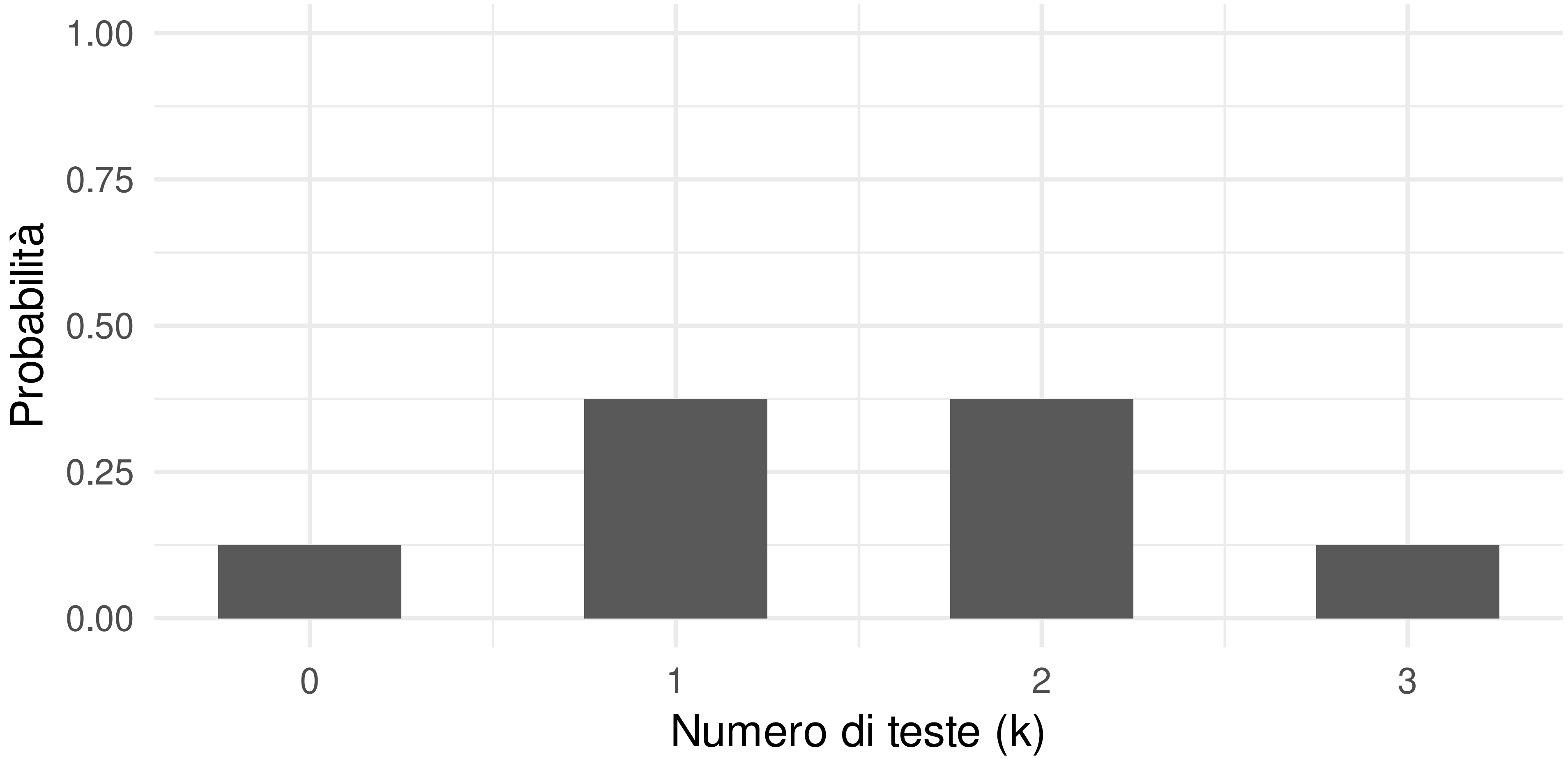
La distribuzione Binomiale descrive la probabilità di ottenere:

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

successi in n prove, quando:

- ogni prova ha due possibili esiti
- la probabilità di successo è sempre la stessa
- le prove sono indipendenti

Esempio con $n = 3$ e $\theta = 0.5$



Come leggere questo grafico

Questo grafico ci dice quanto è probabile osservare:

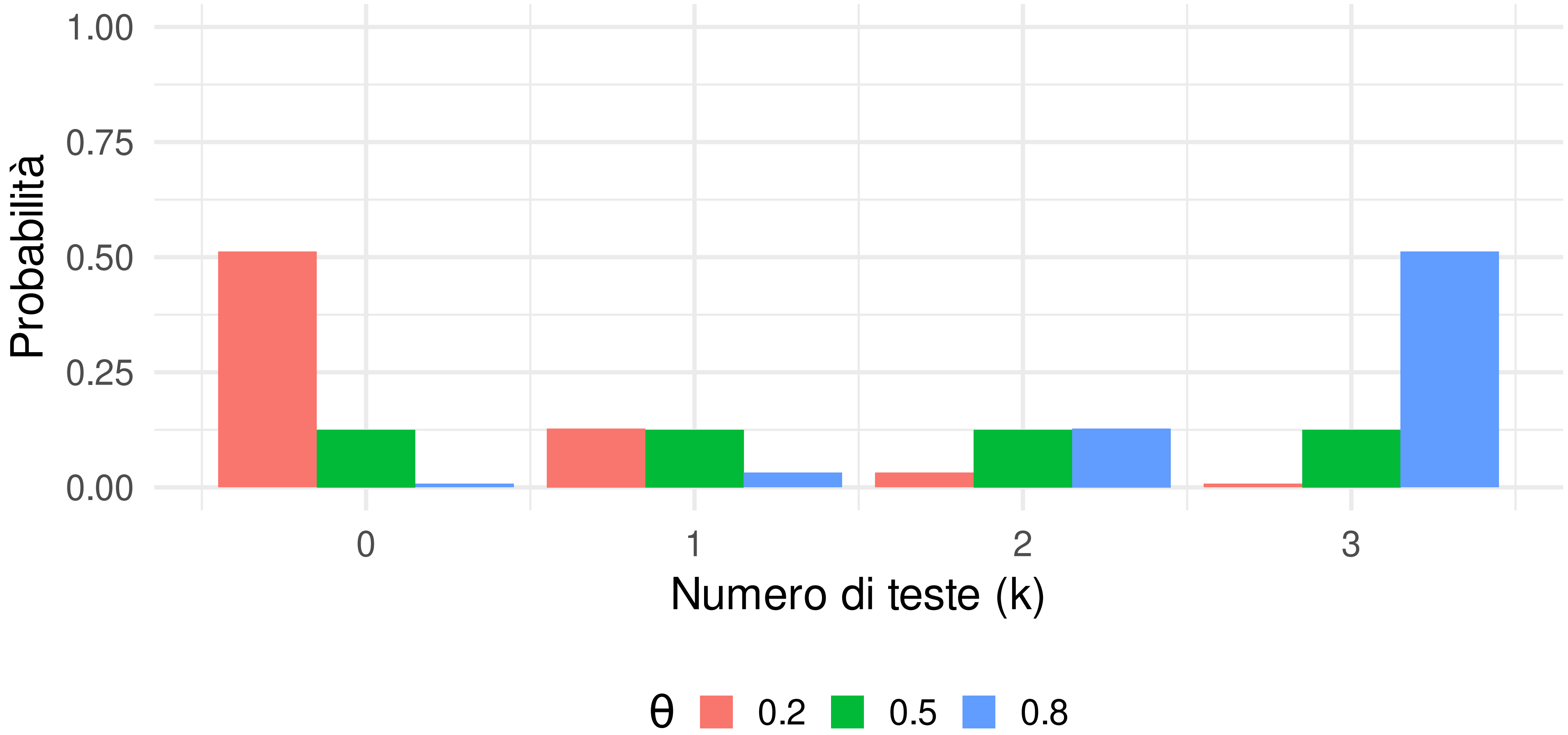
- 0 teste
- 1 testa
- 2 teste
- 3 teste

La somma di tutte queste probabilità è sempre uguale a 1 perchè una delle quattro possibilità deve necessariamente verificarsi.

Se cambia θ, cambia la distribuzione

n1	n2	n3	E	k	theta 0.2	theta 0.5	theta 0.8
⚪	⚪	⚪	1	0	0.512	0.125	0.008
⚪	⚪	🔵	2	1	0.128	0.125	0.032
⚪	🔵	⚪	3	1	0.128	0.125	0.032
⚪	🔵	🔵	4	2	0.032	0.125	0.128
🔵	⚪	⚪	5	1	0.128	0.125	0.032
🔵	⚪	🔵	6	2	0.032	0.125	0.128
🔵	🔵	⚪	7	2	0.032	0.125	0.128
🔵	🔵	🔵	8	3	0.008	0.125	0.512

Stessa idea, distribuzioni diverse



Che cos'è, allora, una distribuzione?

In questo esempio, la distribuzione è una funzione che assegna una probabilità a ciascun valore possibile di K.

In simboli:

$$p(k \mid \theta, n)$$

Questa funzione dipende dai parametri:

- n: numero di prove
- θ: probabilità di successo

Se cambiano i parametri, cambia la forma della distribuzione.

Variabili discrete

La Binomiale è un esempio di distribuzione per una **variabile discreta**.

Una variabile è discreta quando può assumere valori separati e numerabili, ad esempio:

- numero di errori
- numero di risposte corrette
- numero di sintomi
- numero di successi in un compito

Funzione di massa di probabilità

Nel caso discreto, la funzione assegna una **probabilità** a ogni valore possibile.

Per questo si parla di: **funzione di massa di probabilità** (PMF, *Probability Mass Function*)

Per una variabile discreta:

- $p(x) \geq 0$
- ogni valore ha una probabilità
- la somma totale delle probabilità è 1

Variabili continue

Altre variabili invece sono **continue**.

Esempi tipici in psicologia:

- tempo di reazione
- tempo trascorso
- intensità di una risposta fisiologica
- punteggi misurati su una scala continua

Qui i valori possibili non sono solo $0, 1, 2, \ldots$ ma un insieme continuo di numeri.

Un punto fondamentale

Nel caso discreto possiamo chiedere:

> qual è la probabilità di osservare esattamente x?

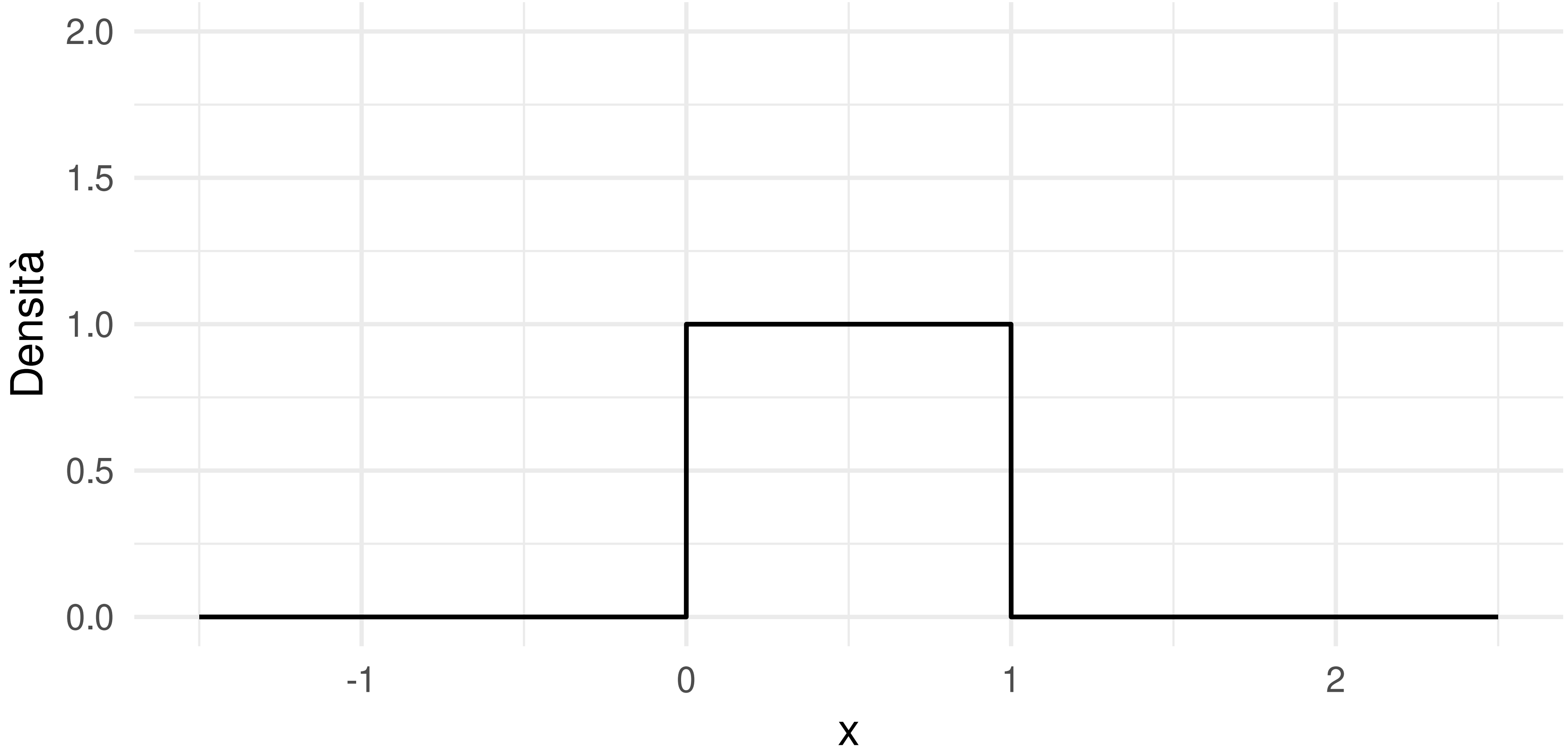
Nel caso continuo, invece, la probabilità di un singolo valore è:

$$p(x) = 0$$

Nel continuo ha senso parlare della probabilità di un **intervallo** di valori.

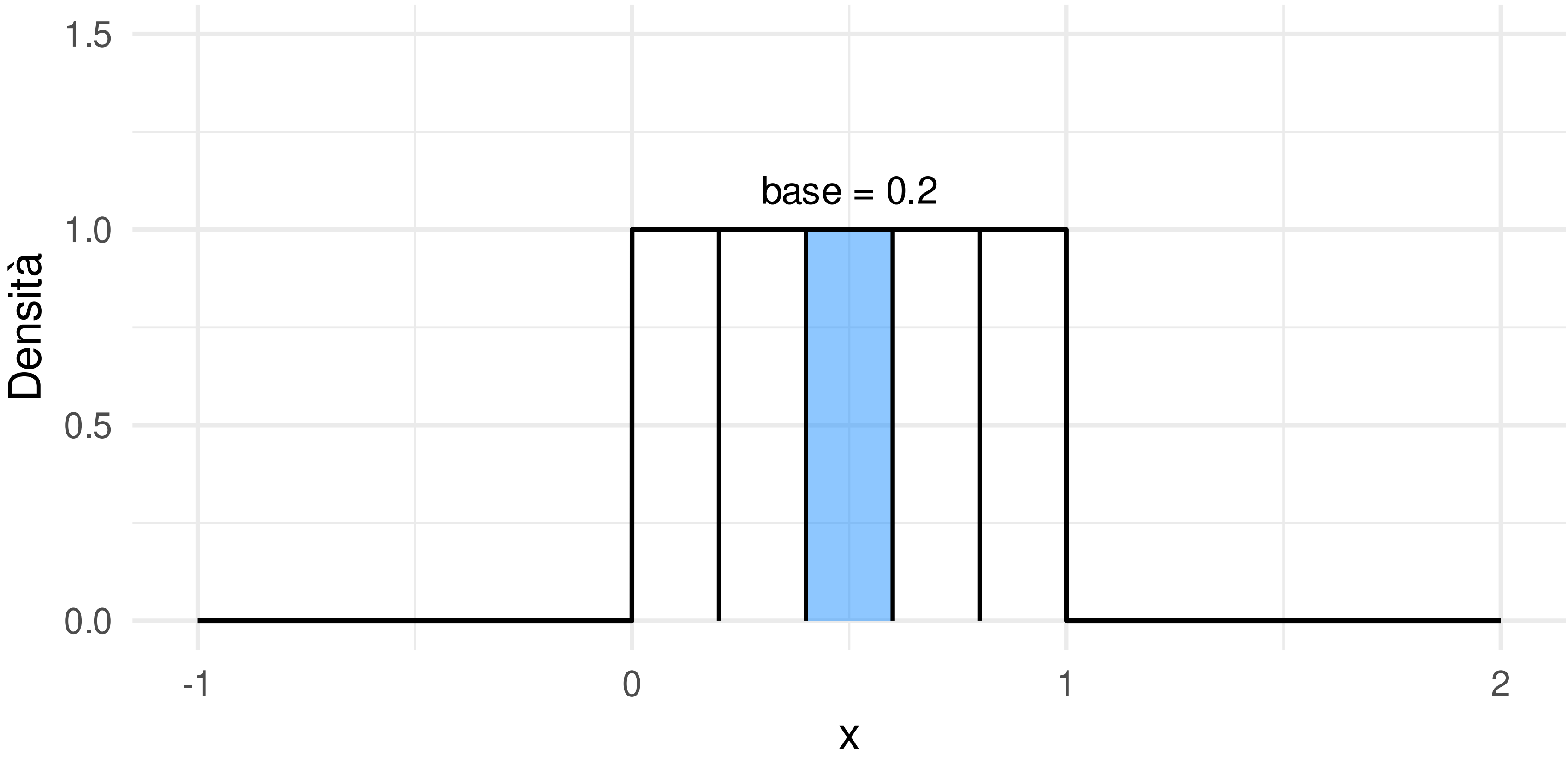
Un esempio semplice

Immaginiamo una variabile continua distribuita uniformemente tra 0 e 1.



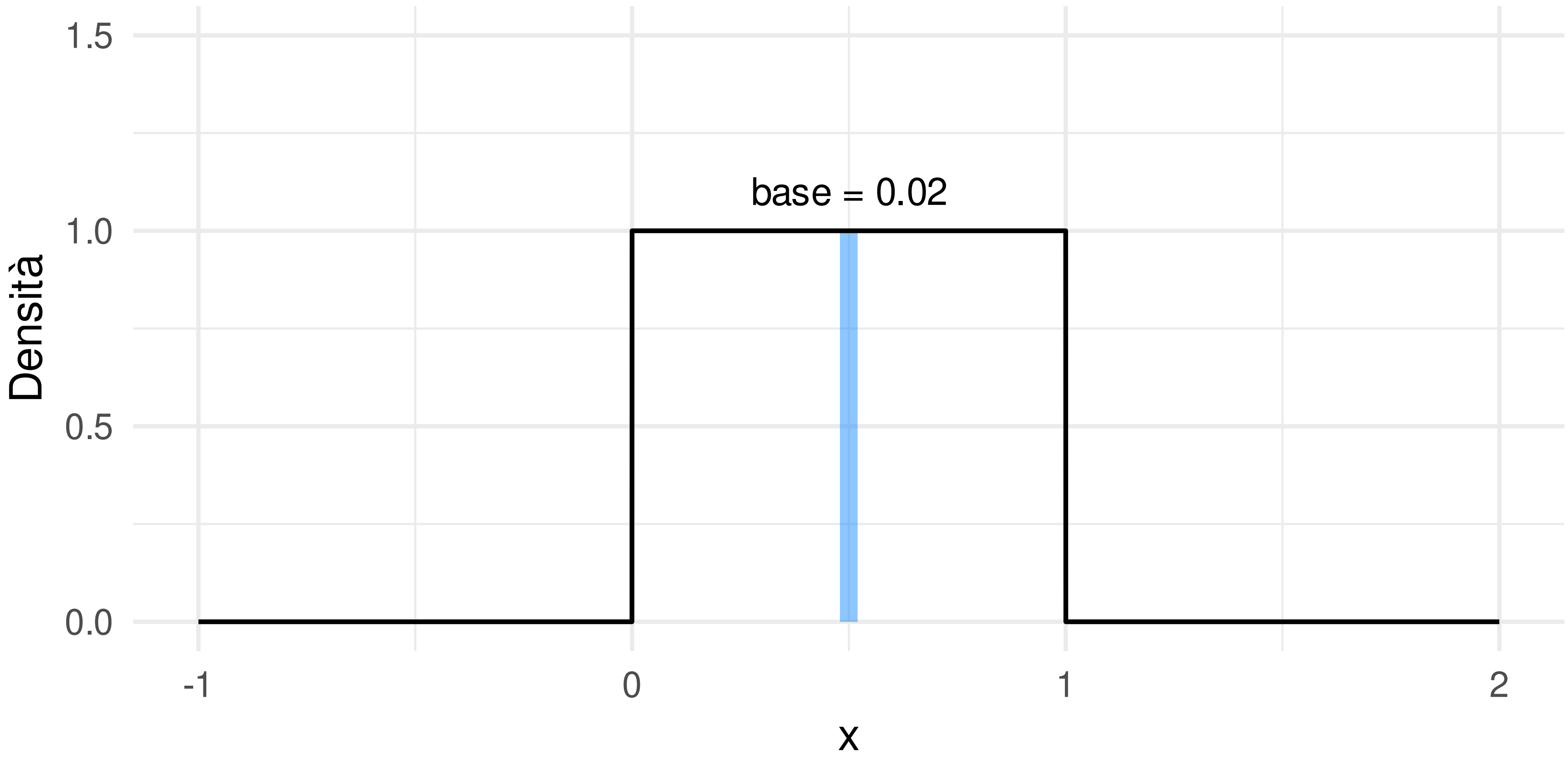
Un esempio semplice

Immaginiamo ora di creare un rettangolo di base $b = 0.2$, l'area in questo caso sarebbe $0.2 \times 1 = 0.2$. Se sommiamo tutti questi rettangoli abbiamo 1 ovviamente.



Un esempio semplice

Ora proviamo a ridurre la base ancora. L'area ora è $0.02 \times 1 = 0.02$. Ma la somma di tutti i rettangoli è sempre 1.



Probabilità e area

Nel caso continuo, l'altezza della curva **non è una probabilità** ma viene chiamata **densità**. La probabilità si ottiene invece come **area sotto la curva**.

Per esempio, la probabilità che x cada in un certo intervallo corrisponde all'area della regione sotto la curva in quell'intervallo.

$p(x) = 0$

Se restringiamo l'intervallo sempre di più, l'area diventa sempre più piccola.

Nel limite di un singolo punto, l'area diventa 0.

Quindi, per variabili continue:

- la probabilità di un singolo valore è 0
- la probabilità riguarda intervalli
- la densità può anche essere maggiore di 1
- l'area totale sotto la curva resta sempre 1

Funzione di densità

Nel caso continuo si parla di **funzione di densità di probabilità** (PDF, *Probability Density Function*). La probabilità è definita nell'intervallo compreso tra due valori a e b è:

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

e l'area totale sotto la curva è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Distribuzione Normale

Un esempio classico è quello della distribuzione Normale che è determinata da due parametri:

- μ: la media, cioè il centro della distribuzione
- σ: la deviazione standard, cioè quanto la distribuzione è larga o stretta

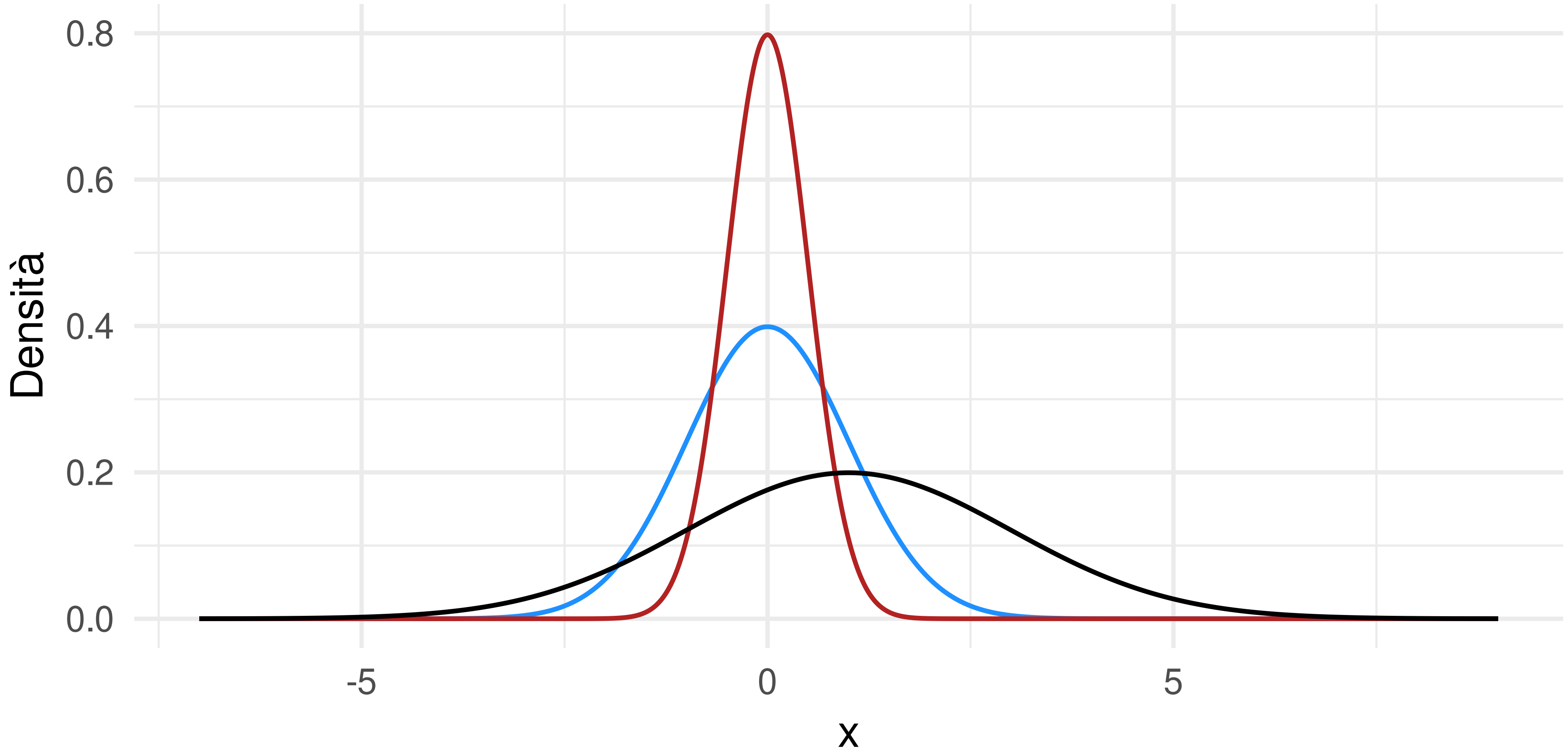
Non è importante memorizzare la formula.
È importante capire come questi parametri cambiano la forma della curva.

Formula della Normale

$$f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Anche qui, il valore della funzione è una **densità**, non una probabilità puntuale.

Come cambia la Normale



Un punto importante sulla densità

Una curva più alta **non significa** e quindi con densità maggiore non significa una maggiore probabilità.

La stessa area totale (totale = 1) è concentrata in una regione più piccola.

Per questo una densità può anche essere maggiore di 1 mentre l'area sotto la curva è sempre 1.

Confronto finale: discreto vs continuo

Tipo di variabile	Esempio	Funzione	Interpretazione
Discreta	numero di errori, numero di successi	$p(x)$	probabilità del singolo valore
Continua	tempo di reazione, misure continue	$f(x)$	densità; la probabilità è l'area su un intervallo

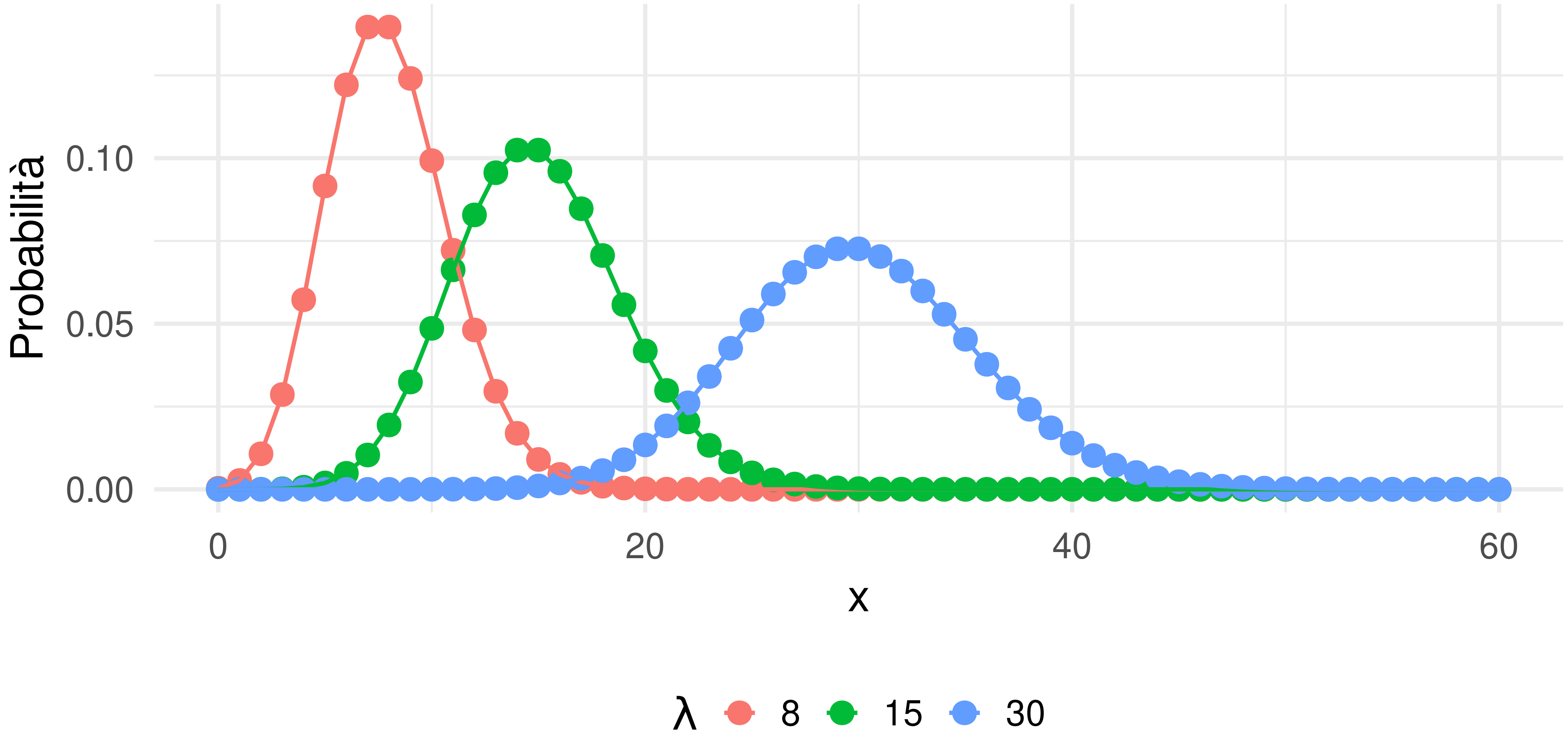
Qualche altro esempio, Poisson [#extra]

La distribuzione di Poisson descrive la probabilità (PMF) per eventi discreti. Si usa per contare il numero di eventi in un certo lasso di tempo. Lo spazio campionario è $\{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$f(x \mid \lambda) = p(x \mid \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

La formula è nuova (non la vedremo) ma la logica è la stessa. Per ogni possibile esito discreto x, la funzione assegna una probabilità in funzione dell'unico parametro λ.

Qualche altro esempio, Poisson [#extra]

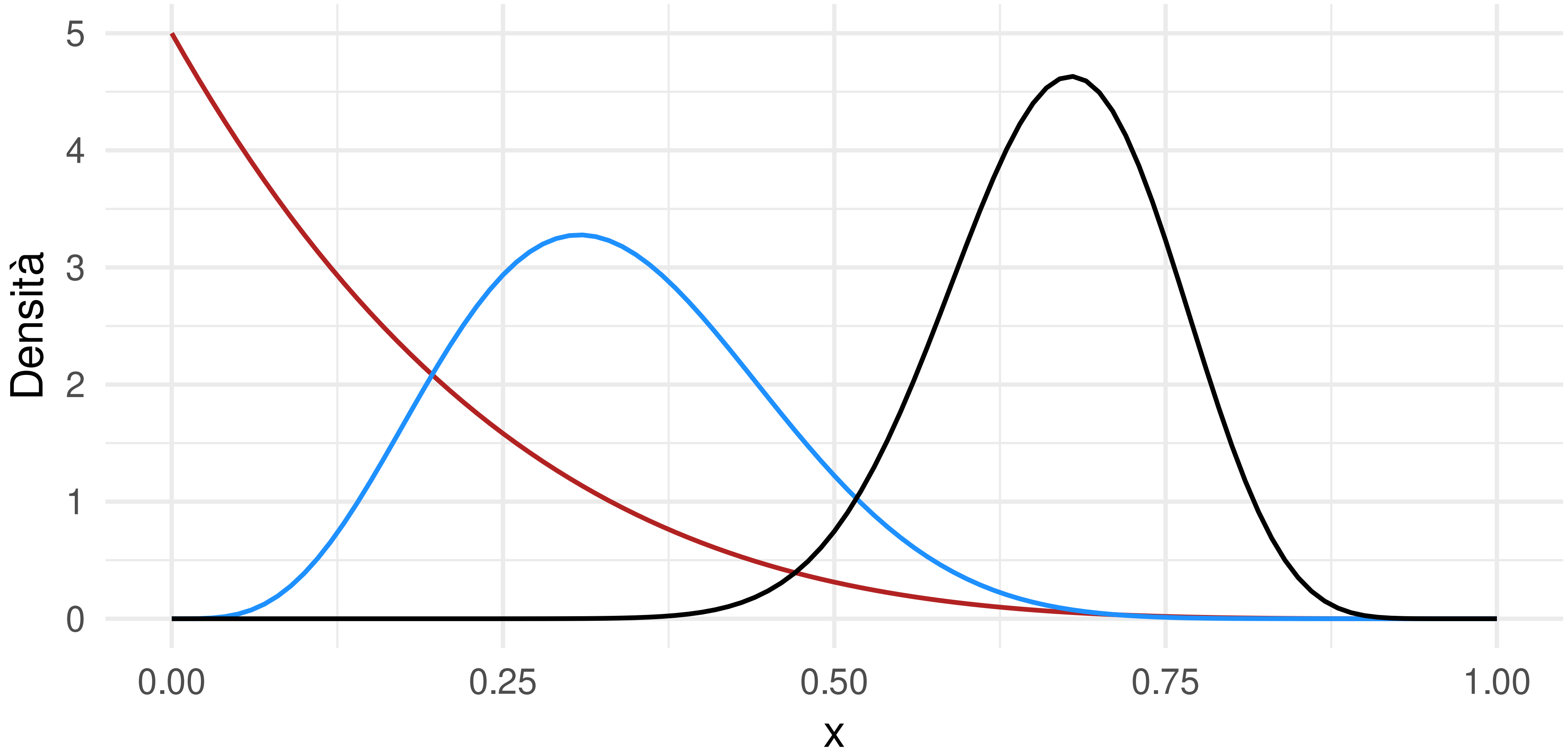


Qualche altro esempio, Beta [#extra]

La distribuzione Beta è una distribuzione di probabilità continua ma compresa tra 0 e 1.

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

Qualche altro esempio, Beta [#extra]



Bibliografia

Kruschke, J. K. (2015). *Doing Bayesian Data Analysis*. https://doi.org/10.1016/c2012-0-00477-2